

## 1 扩展 Kalman 滤波

在前几次课中, 我们已经学习了 Kalman 滤波和移动机器人的 unicycle 运动学模型。对于一般的  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  的离散时间线性系统而言,

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + w_t, \\ y_t &= Cx_t + v_t, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $w_t$  为过程白噪声,  $\mathbb{E}[w_t] = 0$ ,  $\text{cov}(w_t, w_s) = \delta(t-s)Q$ ;  $v_t$  为观测白噪声,  $\mathbb{E}[v_t] = 0$ ,  $\text{cov}(v_t, v_s) = \delta(t-s)R$ 。针对该离散时间线性系统, 其 Kalman 滤波器为:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1|t} &= A\hat{x}_{t|t} + Bu_t, \\ P_{t+1|t} &= AP_{t|t}A^T + Q, \\ \hat{x}_{t+1|t+1} &= \hat{x}_{t+1|t} + P_{t+1|t}C^T(CP_{t+1|t}C^T + R)^{-1}(y_{t+1} - C\hat{x}_{t+1|t}) \\ P_{t+1|t+1} &= P_{t+1|t} - P_{t+1|t}C^T(CP_{t+1|t}C^T + R)^{-1}CP_{t+1|t} \end{aligned} \quad (2)$$

值得注意的是, (1)是线性模型; 然而, 更多的时候, 我们的模型是非线性的:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f_t(x_t, u_t) + w_t \\ y_t &= h_t(x_t) + v_t, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_t \in \mathbb{R}^p$ ,  $u_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $w_t$  和  $v_t$  的假设与(1)相同。

而我们在第二次课中, 已经知道,  $x_{t+1} | y_{1:t+1}$  的后验概率可由下式计算:

$$\begin{aligned} p(x_{t+1} | y_{1:t+1}) &= \frac{p(x_{t+1}, y_{t+1} | y_{1:t})}{p(y_{t+1} | y_{1:t})} = \frac{p(y_{t+1} | x_{t+1})p(x_{t+1} | y_{1:t})}{p(y_{t+1} | y_{1:t})} \\ &= \frac{p(y_{t+1} | x_{t+1})}{p(y_{t+1} | y_{1:t})} \int p(x_{t+1}, x_t | y_{1:t}) dx_t \\ &= \frac{p(y_{t+1} | x_{t+1})}{p(y_{t+1} | y_{1:t})} \int p(x_{t+1} | x_t, y_{1:t})p(x_t | y_{1:t}) dx_t \\ &= \frac{p(y_{t+1} | x_{t+1})}{p(y_{t+1} | y_{1:t})} \int p(x_{t+1} | x_t)p(x_t | y_{1:t}) dx_t, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $p(y_{t+1} | y_{1:t})$  为归一化常数。在这种非线性模型的情况下, 如果我们仍要从  $\mathbb{P}(x_t | y_{1:t})$  这一后验概率分布中采样 (计算期望和方差), 其主要困难在于上式中积分值的计算。在线性系统中, 如果先验概率为高斯分布, 那么后验概率也必定为高斯分布。这种先验概率与后验概率同属于同一种概率分布的特性叫做“共轭先验”(Conjugate Prior)。对于非线性系统(3), 哪怕系统状态的在  $t$  时

刻的先验概率分布  $p(x_t|y_{1:t})$  符合高斯分布，在大多数情况下无法保证“共轭先验”的特性；因此，我们无法得知联合分布的概率密度函数  $p(x_t, x_{t+1}|y_{1:t})$  关于  $x_t$  的积分的解析表达形式（即使可以知道，计算也非常复杂；对于每一个时刻  $t$  来说，解析计算式可能都不一样）。

对于以上问题，蒙特-卡洛马尔科夫链（Monte-Carlo Markov Chain）会通过数值近似的方法，在每一步近似计算(4)式中的积分，在本课程中不作讨论。而另一种近似方法是，通过对系统动态(3)线性化来对系统动态进行近似，然后把该问题转化到经典 Kalman 滤波器的框架下解决。

在  $t$  时刻，我们把非线性项  $f_t(x_t, u_t)$  和  $h_t(x_t)$  对  $x_t$  在当前的所能获得的最优估计  $\hat{x}_{t|t}$  和  $\hat{x}_{t|t-1}$  处进行一阶泰勒展开（由于  $u_t$  已知，所以我们不需要在  $u_t$  处一阶泰勒展开），即

$$\begin{aligned} f_t(x_t, u_t) &\approx f_t(\hat{x}_{t|t}, u_t) + F_t(\hat{x}_{t|t}, u_t)(x_t - \hat{x}_{t|t}) \\ h_t(x_t) &\approx h_t(\hat{x}_{t|t}) + H_t(\hat{x}_{t|t})(x_t - \hat{x}_{t|t-1}), \end{aligned}$$

其中，

$$F_t(\hat{x}_{t|t}, u_t) = \frac{\partial f_t(x, u_t)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{t|t}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_t^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_t^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_t^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_t^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} \Big|_{x=\hat{x}_{t|t}}, \quad (5)$$

$$H_t(\hat{x}_{t|t}) = \frac{\partial h_t(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{t|t-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_t^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial h_t^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial h_t^p}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial h_t^p}{\partial x^n} \end{bmatrix} \Big|_{x=\hat{x}_{t|t-1}}, \quad (6)$$

$\frac{\partial f_t^i}{\partial x^j}$  表示  $f_t$  的第  $i$  个分量对  $x$  的第  $j$  个分量求导。

这么做的假设是：我对于当前时刻的状态  $x_t$  的估计是准确的，而这些非线性项在  $\hat{x}_{t|t}$  的邻域内的行为与线性的一阶泰勒展开项差不多。

综上，经过线性化近似的系统变为：

$$\begin{aligned} x_{t+1} &\approx F_t x_t + \tilde{f}_t(x_t, u_t) + w_t, \\ y_t &\approx H_t x_t + \tilde{h}_t(x_t) + v_t, \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(x_t, u_t) &= f_t(\hat{x}_{t|t}, u_t) - F_t \hat{x}_{t|t}, \\ \tilde{h}_t(x_t) &= h(\hat{x}_{t|t-1}) - H_t \hat{x}_{t|t-1}, \end{aligned}$$

然后，我们对上述模型进行 Kalman 滤波，（将  $\tilde{f}_t(x_t, u_t)$  和  $\tilde{h}_t$  视为已知的函数）可以得到：

Prediction Step:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1|t} &= F_t \hat{x}_{t|t} + \tilde{f}_t(\hat{x}_{t|t}, u_t) = f_t(\hat{x}_{t|t}, u_t) \\ P_{t+1|t} &= F_t P_{t|t} F_t^T + Q \end{aligned}$$

Update Step:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1|t+1} &= \hat{x}_{t+1|t} + P_{t+1|t} H_{t+1}^T (H_{t+1} P_{t+1|t} H_{t+1}^T + R)^{-1} (y_{t+1} - H_{t+1} \hat{x}_{t+1|t} - \tilde{h}_{t+1}(\hat{x}_{t+1|t})) \\ &= \hat{x}_{t+1|t} + P_{t+1|t} H_{t+1}^T (H_{t+1} P_{t+1|t} H_{t+1}^T + R)^{-1} (y_{t+1} - h_{t+1}(\hat{x}_{t+1|t})), \\ \hat{P}_{t+1|t+1} &= P_{t+1|t} - P_{t+1|t} H_{t+1}^T (H_{t+1} P_{t+1|t} H_{t+1}^T + R)^{-1} H_{t+1} P_{t+1|t}. \end{aligned}$$

若在实际应用中，出现传感器更新与系统动态更新失步的情况，对于系统的过程噪声、prediction step、update step 的调整一切和之前线性模型的情况一致。

## 2 移动机器人的观测模型

### 2.1 地图类型

移动机器人的观测模型描述了传感器测量在物理世界中的形成过程。为了表达产生测量的过程，我们需要指定生成测量的环境。环境的地图是环境中的对象及其位置的列表。

$$m = \{m_1, m_2, \dots, m_N\} \quad (7)$$

其中， $N$  代表环境中对象的总数；每个  $m_n, 1 \leq n \leq N$  代表该对象的性质。地图通常可分为两类：基于特征的地图和基于位置的地图。

- **基于特征的地图**： $n$  表示特征索引， $m_n$  的值表示特征的笛卡尔坐标位置。  
例子：图 1 可以表示为基于特征的地图。

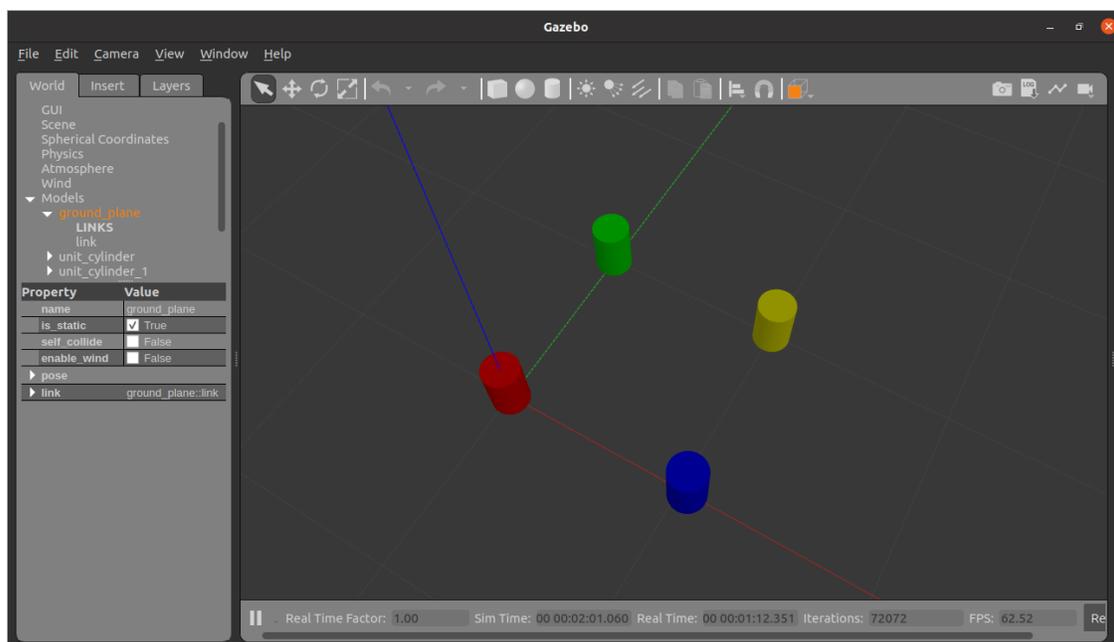


Figure 1: 环境中有 4 个不同颜色的圆柱体，作为地图中的特征

其中：

$n = \{1, 2, 3, 4\}$  分别表示红、蓝、绿、黄四个圆柱体的索引。

$m_1 = (0, 0)$  表示红色圆柱体的平面坐标。

$m_2 = (1, 0)$  表示蓝色圆柱体的平面坐标。

$m_3 = (0, 1)$  表示绿色圆柱体的平面坐标。

$m_4 = (1, 1)$  表示黄色圆柱体的平面坐标。

$m = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$  即为整个地图。

- **基于位置的地图**： $n$  表示特征位置， $m_n$  的值表示该位置对象的属性（在平面地图中，通常用  $m_{x,y}$  而不是  $m_n$  来表示地图元素，以明确表示  $m_{x,y}$  是特定世界坐标 (x y) 的属性）。  
例子：图 2 所示栅格地图是一种基于位置的地图。

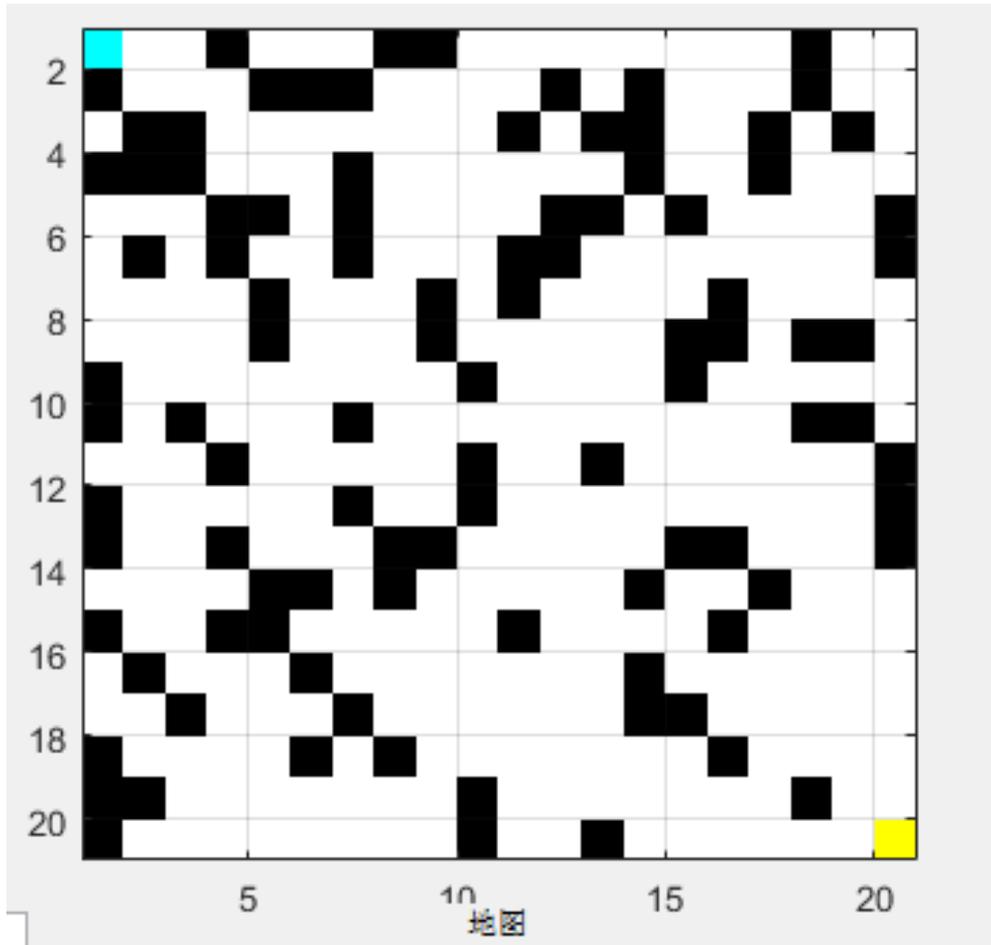


Figure 2: occupied grid

其中：

$n = (0,0)$  表示第一个栅格的索引，也可以进一步根据栅格地图与现实世界的放缩比转化为现实的世界坐标。

$m_1 = m_{0,0} = 0$  表示第一个栅格未被占用（即不存在障碍物）。

在接下来的 EKF 实验中，我们采用图 1 所示的特征地图。

## 2.2 观测模型

基于光学的传感器，如激光雷达、相机等，其数学模型较为相似，可以测量特征（或地标）相对于机器人局部坐标系的 range(距离) 和 bearing (方位)。这类传感器被称为 range and bearing 传感器。而在特征地图中，其观测模型是很常用的。

现在我们对于  $t$  时刻第  $i$  个特征对应地图上第  $j$  个地标的而言，建立测量模型。对于上节课中我们介绍的 unicycle 机器人运动学模型而言，其位姿（状态）由  $x_t = (x \ y \ \theta)^T$  表示。假设 range

and bearing 传感器安装在 unicycle 机器人的中心，其观测模型的数学表达式为：

$$\begin{pmatrix} r_t^i \\ \phi_t^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{j,x} - x)^2 + (m_{j,y} - y)^2} \\ \arctan 2(m_{j,y} - y, m_{j,x} - x) - \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{t,1}^i \\ v_{t,2}^i \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中， $[v_{t,1}^i, v_{t,2}^i]^T$  为对第  $i$  个地标观测的噪声；假设其分布为白噪声，即其期望与方差满足： $\mathbb{E}[v_{t,1}^i, v_{t,2}^i]^T = 0$ ， $\text{cov}([v_{t,1}^i, v_{t,2}^i], [v_{s,1}^i, v_{s,2}^i]^T) = \delta(t - s)R$ 。我们假设对不同的地标  $i$  的观测噪声相互独立。

值得注意的是：

- 特征的提取以及与地图上的地标进行匹配的过程本身就是一个研究难点。在我们实验中，为了简化过程，以颜色作为特征方便提取，同时与地图地标的匹配关系已知。
- 在本实验中，无论是机器人 unicycle 的运动学模型还是 range and bearing 观测模型，均为非线性模型。为了实现机器人的定位，我们需要采用扩展 Kalman 滤波。